

Sia $T: V \rightarrow V$ endomorfismo.

Applichiamo Ruffini a $P_T(t)$ in $\mathbb{K}[t]$:

$$P_T(t) = (t - \lambda_1)^{a_1} \cdots (t - \lambda_k)^{a_k} f(t)$$

dove $f(t)$ è un polinomio che
non ha radici in $\mathbb{K}$

Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $f(t) = 1$ per il "teorema
fondamentale
dell'algebra".

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $f(t)$ potrebbe essere per
esempio $(t^2 + 1)(t^4 + 2)$

Chiamiamo a_1 "multiplicità algebrica
dell'autore λ_1 "

a_2 etc.

Def Dato λ_i autovale di T
 chiamiamo $\dim V_{\lambda_i} = \dim \ker(T - \lambda_i I)$
 la "multiplicità geometrica di λ_i ".

Lemma Per ogni autovale λ_i di T
 vale

$$\text{mult alg di } \lambda_i \geq \text{mult. geom di } \lambda_i$$

Dim

$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k} \subseteq V$$

$\swarrow = V$ T diagonalizzabile

$\searrow \neq V$ T non è diag

U

STUDIO 1 DUE CASI

1° CASO

$$L_e = V$$

2° caso base^b = {base di V_{λ_1} } $\cup$ {base di V_{λ_2} } $\cup$

$\cup \dots \cup$ {base di V_{λ_k} }

b è base di V.

$$[T]_b^b = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_1 & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & \lambda_k \\ & & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

$$P_T(t) = \det \left(tI - [T]_b^b \right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} \underline{t-\lambda_1} & & & \\ & \underline{t-\lambda_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \text{O} \\ & \text{O} & & \\ & & & \ddots \\ & & & & t-\lambda_k \end{pmatrix}$$

$$= (t-\lambda_1)^{\dim V_{\lambda_1}} \cdots (t-\lambda_k)^{\dim V_{\lambda_k}}$$

In questo caso $\forall \lambda_i$ vale

$$\begin{array}{ccc} a_i = \dim V_{\lambda_i} & & \\ \uparrow & & \nwarrow \\ \text{mult alg di } \lambda_i & & \text{mult geom di } \lambda_i \end{array}$$

2° caso

$$\begin{array}{c} \subsetneq V \\ \neq \\ b' = \{ \text{base di } V_{\lambda_1} \} \cup \{ \text{base di } V_{\lambda_2} \} \cup \\ \cup \{ \text{base di } V_{\lambda_k} \} \end{array}$$

b' non è una base di V

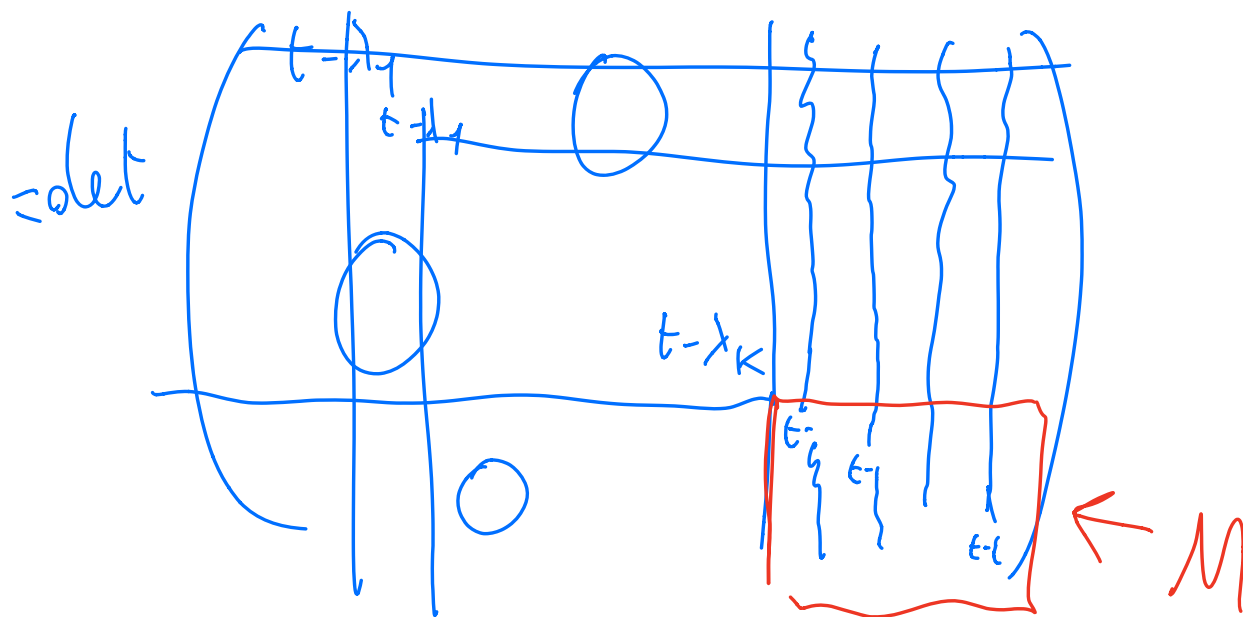
è insieme di vettori lin INDIP

Estendo b' ad una base

$b' \cup S = b$ di V

$$[T]_{b,b} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ 0 & \lambda_1 & & & & & & & \\ 0 & & \ddots & & & & & & \\ 0 & & & & & & & & \\ 0 & & & & \lambda_k & & & & \\ \hline 0 & & & & 0 & \lambda_k & & & \\ 0 & & & & 0 & 0 & & & \\ 0 & & & & 0 & 0 & & & \end{pmatrix} \begin{matrix} Ts_1 \\ Ts_2 \\ Ts_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix}$$

$$p_T(t) = \det(tI - [T]_{b,b}) =$$



$$(t - \lambda_1)^{\dim V_{\lambda_1}} \quad (t - \lambda_k)^{\dim V_{\lambda_k}} \cdot \det M$$

$\uparrow$
 polinomio

da questa scrittura risulta
che $\forall i$

$$\text{mult alg di } \lambda_i \geq \dim V_{\lambda_i}$$

Teorema Sia $T: V \rightarrow V$ endomorfismo. □

Allora T è diagonalizzabile se e solo se

$$P_T(t) = (t - \lambda_1)^{a_1} \cdots (t - \lambda_k)^{a_k}$$

$\wedge$

con $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ e inoltre

$\forall \lambda_i$ vale

molt alg $\lambda_i =$ molt geom di λ_i

ovvia $a_i = \dim V_{\lambda_i}$

Dim la faccia

T diagonalizzabile $\Rightarrow$

$$p_T(t) =$$

$$= (t - \lambda_1)^{a_1}$$

$$(t - \lambda_k)^{a_k}$$

e $\forall i$

$$a_i = \dim V_{\lambda_i}$$

si è già

osservato durante la dim del tes precedente.

$f(t)$ "non c'è"

Dimostrare allora

T diagonalizzabile $\Leftarrow$

$$P_T(t) =$$

$$= (t - \lambda_1)^{a_1}$$

$$(t - \lambda_k)^{a_k}$$

e $\forall i$

$$a_i = \dim V_{\lambda_i}$$

Basta mostrare che

$$V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k} = V$$

$$\text{Lo che } \dim(V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}) =$$

$$= \dim V_{\lambda_1} + \dots + \dim V_{\lambda_k} =$$

per ipotesi
 $a_i = \dim V_{\lambda_i}$

$$= a_1 + \dots + a_k =$$

$$= \text{grado del polinomio } P_T(t) = \dim V$$

perché

$$P_T(t) = \det \begin{pmatrix} t - a & & \\ & \ddots & \\ & & t - a \end{pmatrix}$$

ha grado $= \dim V$

Quindi

$$\dim (V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}) = \dim V$$

e pertanto

$$V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k} = V$$

e T è diagonalizzabile $\square$

Esercizio Il polinomio caratteristico
nel caso $\dim V = 2$

$T : V \rightarrow V$ Sia b base
di V

$$[T]_b^b = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$P_T(t) = \det \begin{pmatrix} t - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & t - a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= (t - a_{11})(t - a_{22}) - a_{12}a_{21} =$$

$$= t^2 - (a_{11} + a_{22})t + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$= t^2 - \text{traccia} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} t + \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

INFO

In generale, con $\dim V = n$

$$P_T(t) = t^n - \text{traccia}(T) t^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(T)$$
